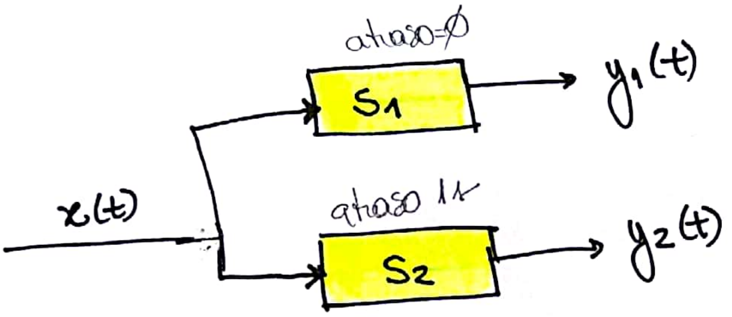
Sistema Causal e Não Causal

Sistema causal: o/p do sistema independe de valores futuros da i/p.



$y_1(0)$ depende de $\underline{x(0)}$ presente

$y_2(0)$ depende de $x(-1)$ = passado

Sistema não causal: o/p do sistema depende de valores futuros da i/p a qualquer instante de tempo.

Anti causal → inverso do causal, i.é, o/p depende exclusivamente dos valores futuros da i/p.

i) $y(t) = x(2t)$

$t = 0 \quad y(0) = x(0)$

$t = -1 \quad y(-1) = x(-2)$

$t = 1 \quad y(1) = x(2) \quad \therefore$ Sistema não causal.

ii) $y(t) = \begin{cases} x(3t) & t < 0 \\ x(t-1) & t \geq 0 \end{cases}$

Percebe-se, pelo item anterior, que, para $t < 0$, o sistema é causal com escalonamento do tempo. Para $t \geq 0$ a nova função depende de instantes anteriores (explicitamente).

$\therefore$ Sistema causal

iii) $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x[n-1]$

coeficiente e, ∴, não devemos nos preocupar.

a entrada x depende de valores passados e, ∴,

o sistema é causal.

iv) $y(t) = \sin t \; x(t)$

novamente, o coeficiente não nos interessa.

∴ sistema causal

v) $y(t) = x(e^{t})$

$t=0 \quad y(0) = x(1)$ ∴ não causal

vi) $y(t) = x(\sin t)$

$t=0 \quad y(0) = x(0)$

$t=\pi \quad y(\pi) = x(0)$

$t=-\pi \quad y(-\pi) = x(0)$ ∴ não causal

vii) $y(t) = x(t/4)$

$t=0 \quad y(0) = x(0)$

$t=1 \quad y(1) = x(1/4)$

$t=-1 \quad y(-1) = x(-1/4)$ ∴ não causal

viii) $y(t) = e^{t} x(t-1)$

vide itens iii) e iv)

∴ sistema causal

ix) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$

Integral é a área sobre a curva. Como a integral é de $-\infty$ até t, depende de passado e presente. ∴ Causal.

SLIT - Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Lineares são sistemas que satisfazem o princípio da Superposição (aditividade e homogeneidade).

Defina se o sistema é linear ou não,

i) $y(t) = x(\sin t)$

$x(t) \rightarrow sist \longrightarrow y(t) = x(\sin t)$

LA

$x_1(t) \rightarrow sist \rightarrow y_1(t) = x_1(\sin t)$

$x_2(t) \rightarrow sist \rightarrow y_2(t) = x_2(\sin t)$

$y_1(t) + y_2(t) = x_1(\sin t) + x_2(\sin t)$

$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow sist \rightarrow y'(t) = x_1(\sin t) + x_2(\sin t)$

LH

$x(t) \rightarrow sist \rightarrow y(t) \rightarrow 'K' \rightarrow Ky(t) = Kx(\sin t)$

$Kx(t) \rightarrow sist \rightarrow y'(t) = Kx(\sin t)$

$\therefore$ linear

ii) $y(t) = x(t^2)$

LA

$x_1(t) \rightarrow sist \rightarrow y_1(t)$

$x_2(t) \rightarrow sist \rightarrow y_2(t)$

$> y_1(t) + y_2(t) = x_1(t^2) + x_2(t^2)$

$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow sist \rightarrow y'(t) = x_1(t^2) + x_2(t^2)$

LH

$x(t) \rightarrow sist \rightarrow y(t) \rightarrow 'K' \rightarrow Ky(t) = Kx(t^2)$

$Kx(t) \rightarrow sist \rightarrow y'(t) = Kx(t^2)$

$\therefore$ linear

Regras: 01. linearidade do sistema independe de 'escalonamento' no tempo.

iii) $y(t) = x(\underbrace{\log t})$

escalonamento no tempo, ∴ linear.

iv) $y(t) = x^2(t)$

LA

$x_1(t) \rightarrow \text{sist} \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)$
$x_2(t) \rightarrow \text{sist} \rightarrow y_2(t) = x_2^2(t)$ $\Big\rangle$ $y_1(t) + y_2(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t)$

$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow \text{sist} \rightarrow y'(t) = [x_1(t) + x_2(t)]^2$

∴ não linear

v) $y(t) = \sin t \; x(t)$

LA

$x_1(t) \rightarrow \text{sist} \rightarrow y_1(t) = \sin t \; x_1(t)$
$x_2(t) \rightarrow \text{sist} \rightarrow y_2(t) = \sin t \; x_2(t)$

$y_1(t) + y_2(t) = \sin t \, [x_1(t) + x_2(t)]$ ✓

$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow \text{sist} \rightarrow y'(t) = \sin t \, [x_1(t) + x_2(t)]$

LH

$x(t) \rightarrow \text{sist} \rightarrow y(t) \rightarrow 'K' \rightarrow K y(t) = \underline{K \sin t \; x(t)}$ ✓

$K x(t) \rightarrow \text{sist} \rightarrow y'(t) \; \underline{\sin t \; K \, x(t)}$

∴ linear

vi) $y(t) = e^2 x(t)$

LA

$x_1(t) \rightarrow \text{sist} \rightarrow y_1(t) = e^2 x_1(t)$
$x_2(t) \rightarrow \text{sist} \rightarrow y_2(t) = e^2 x_2(t)$ $\Big\rangle$ $y_1(t) + y_2(t) = e^2 [x_1(t) + x_2(t)]$ ✓

$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow \text{sist} \; y'(t) = e^2 [x_1(t) + x_2(t)]$

LH, $K y(t) = K e^2 x(t)$
$K x(t) \rightarrow \text{sist} \rightarrow e^2 K x(t)$ $\Big)$ ✓

∴ linear

Regra → 02. linearidade do sistema independe do 'coeficiente' utilizado na relação dos sistemas (veja que ex. v) tem coef. dependente de $\underline{t}$ e ex. vi) tem coeficiente constante).

Já os sistemas invariantes no tempo são aqueles cujos parâmetros não mudam com o tempo.

Quais sistemas estudados anteriormente são dependentes do tempo?

Apenas o sistema do item v).

Quais sistemas são SLIT?

i) $y(t) = x(t+1)$;

O sistema é linear e invariante no tempo (LIT)

Mas é não causal!

ii) $y(t) = 1/x(t)$

Não linear, invariante no tempo

$\Downarrow$

$x(t) \to \text{sist} \to y(t) \to 'K' \to Ky(t) = \dfrac{K}{x(t)}$

$K, x(t) \to \text{sist} \to y'(t) = \dfrac{1}{Kx(t)}$

iii) $3\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - y(t) = x(t)$

LIT

iv) $y(t) = \operatorname{sen} t \; x(t)$

Linear, variante no tempo

v) $y(t) = x(t) + 2$

Não preserva escalonamento, ∴ não linear, inv. no tempo

vi) $y(t) = \cos 2\pi \; x(t)$

LIT

vii) $y(t) = [\log t + 3t^2]\, x(t)$

Linear, variante no tempo

viii) $y(t) = t\, u(t)\; x(t)$

linear, variante no tempo

Convolução

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Convolução é uma integral que expressa a dimensão de 'overlap' de uma função quando esta é transladada no tempo sobre outra função.

1 $x(t) \xrightarrow{t=\tau} x(\tau)$

$h(t) \xrightarrow{t=\tau} h(\tau)$

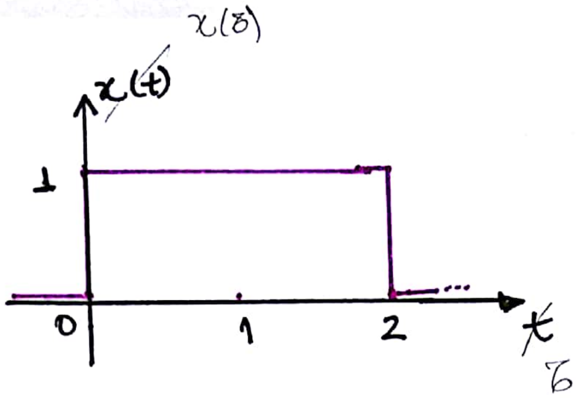
2 $h(\tau)$ ↓ escalonamento no tempo (time scaling) $h(-\tau)$

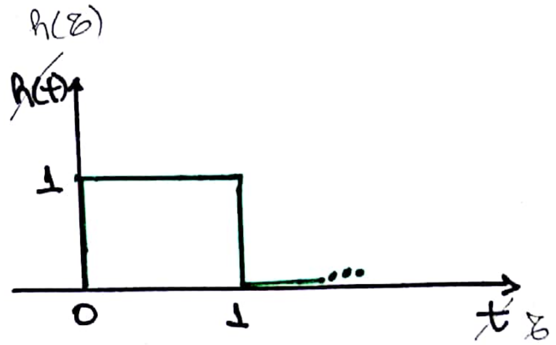
3 $h(-\tau)$ ↓ translação no tempo (time shifting) $h[-(\tau-t)] = h(t-\tau)$

4 $x(\tau)\, h(t-\tau)$

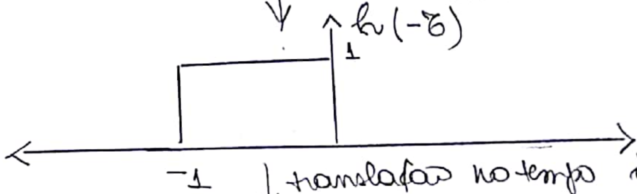
5 $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$

i)

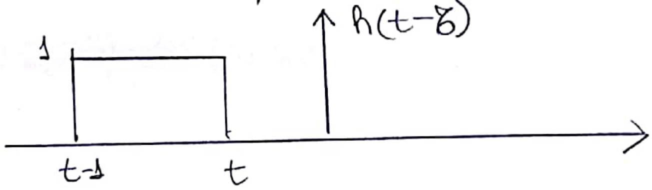




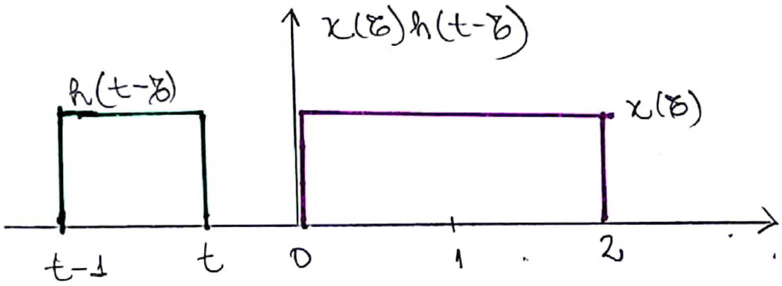
↓ escalonamento no tempo



↓ translação no tempo

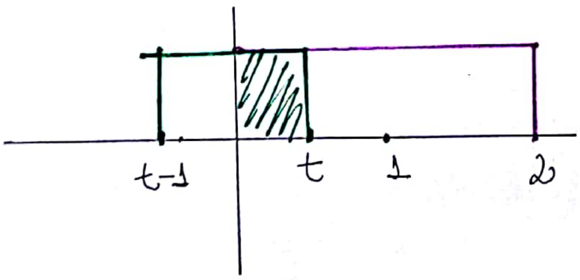


Case 1: $t<0$



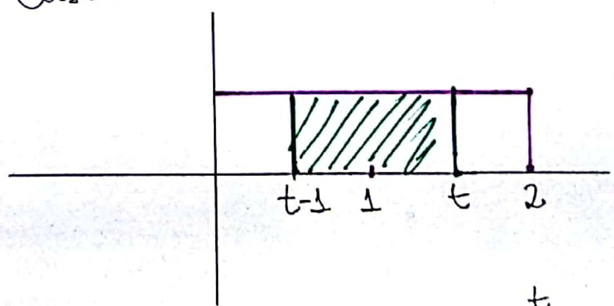
$y(t)=0 \quad t\leq 0$

Case 2: $0<t<1$.



$$y(t)=\int_0^t 1\,d\tau = t$$

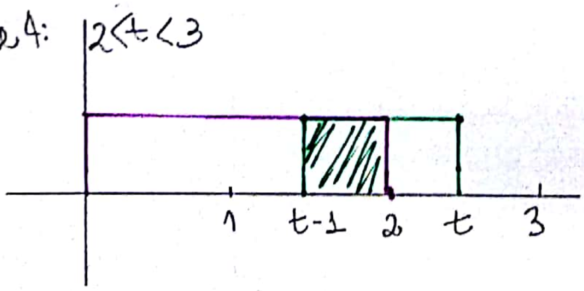
Case 3: $1<t<2$



$$y(t)=\int_{t-1}^{t} 1\,d\tau = \tau\Big|_{t-1}^{t}$$

$$= t-t+1 = 1$$

Case 4: $2<t<3$



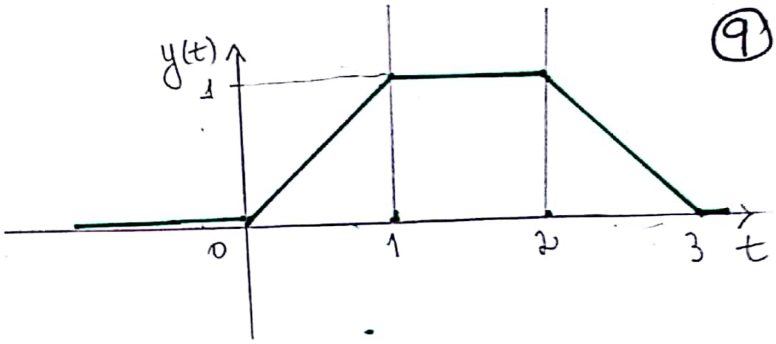
$$y(t)=\int_{t-1}^{2} 1\,d\tau = \tau\Big|_{t-1}^{2} = 2-t+1 = 3-t$$

Case 5: $t>3$

sem 'overlaping'

$y(t)=0$

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ t, & 0<t<1 \\ 1, & 1<t<2 \\ 3-t, & 2<t<3 \\ 0, & t>3 \end{cases}$$



$$y(t) = 0 + 1\, r(t-0) - r(t-1) - r(t-2) + r(t-3)$$

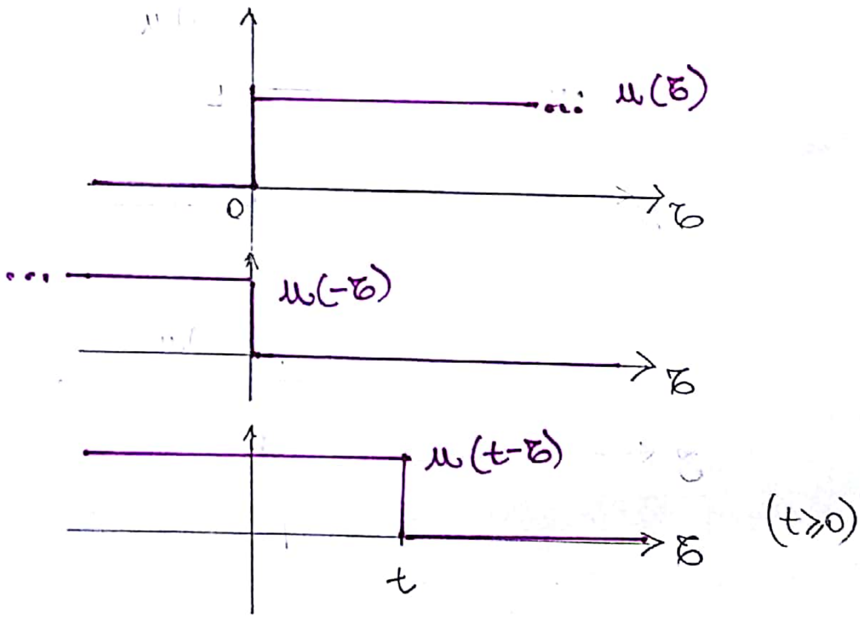
$$\boxed{y(t) = r(t) - r(t-1) - r(t-2) + r(t-3)}$$

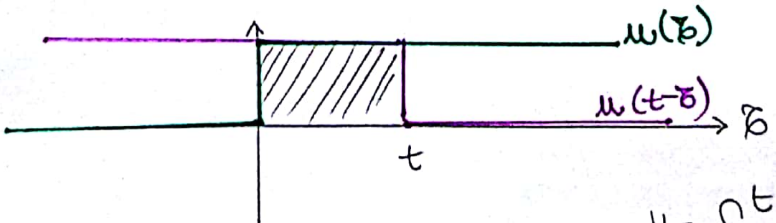
$r(t)$ é a função rampa.

ii) $x(t) = u(t)$

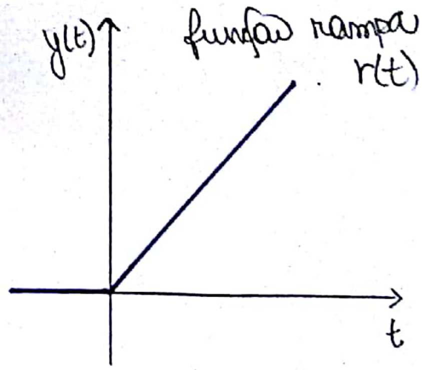
$h(t) = u(t)$

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$





$$y = \int_0^t 1\, d\tau = t$$



$\therefore \; y(t) = t, \quad t \geq 0$

Pode-se simplificar, fazendo: $y(t) = u(t)\, t$
$= r(t)$

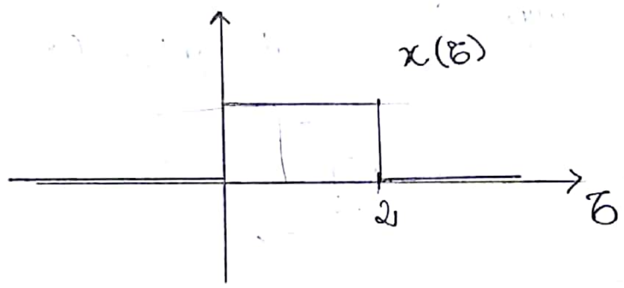
iii)

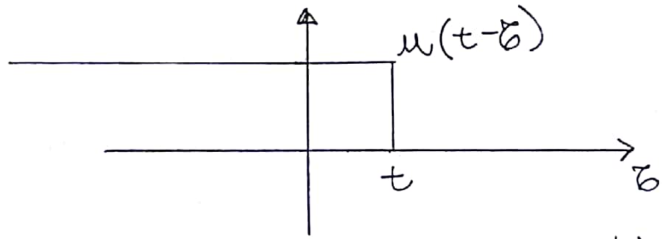
$x(t) = u(t) - u(t-2)$

$h(t) = u(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau) - u(\tau-2)]\, u(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau)\, u(t-\tau) - u(\tau-2)\, u(t-\tau)]\, d\tau$$

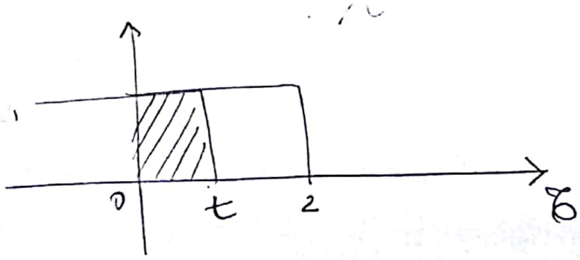




$t \geq 0$

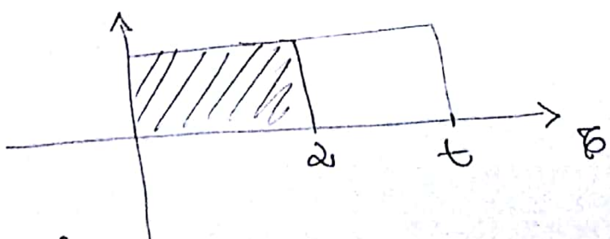
A função é nula para $\tau < 0$
$\tau > 2$

$0 < t < 2$



$$y(t) = \int_0^t 1\, d\tau = t$$

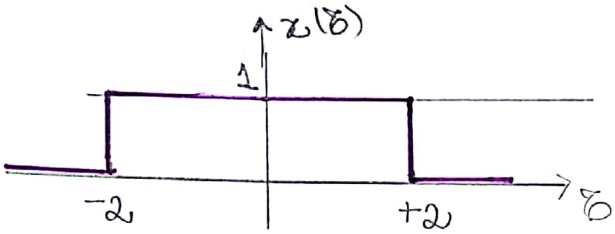
$t > 2$

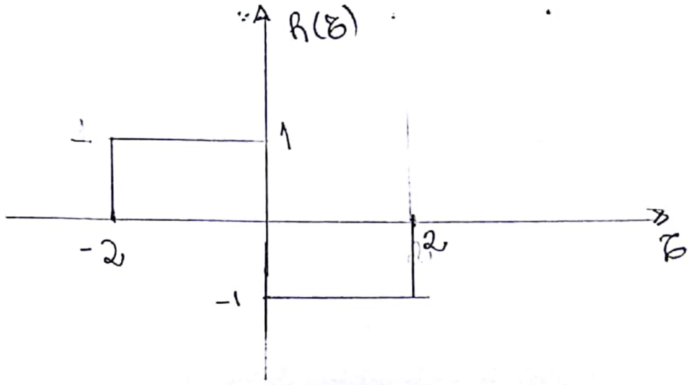


$$y(t) = \int_0^2 1\, d\tau = 2$$

$\therefore \boxed{y(t) = r(t) - r(t-2) + u(t-2)}$ //

iv)
$$x(t) = u(t+2) - u(t-2)$$
$$h(t) = u(t+2) - 2u(t) + u(t-2)$$

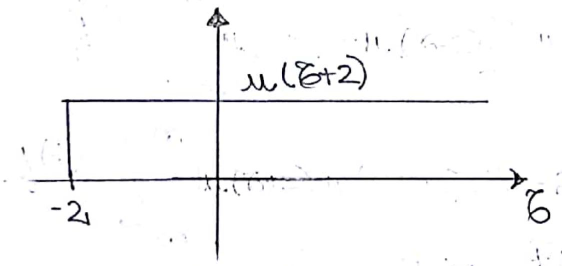


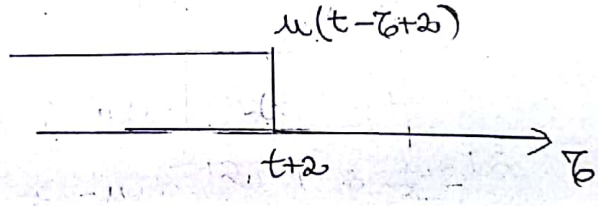


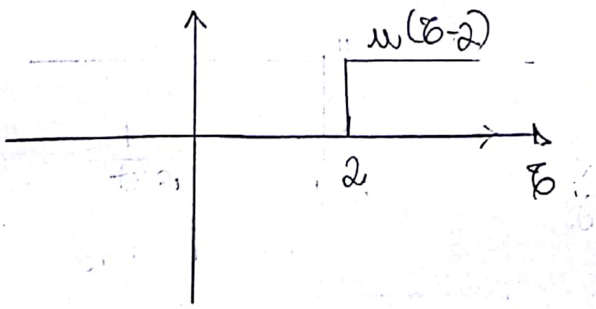
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau+2) - u(\tau-2)]\,[u(t-\tau+2) - 2u(t-\tau) + u(t-\tau-2)]\,d\tau$$

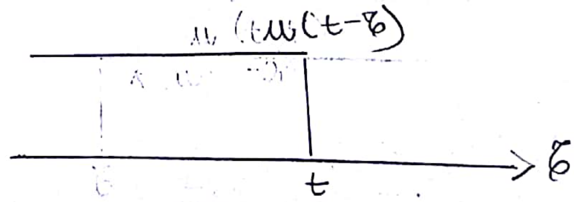
$$u(t-\tau+2) = \begin{cases} 1 & \text{se } t-\tau+2>0 \Rightarrow \tau < t+2 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

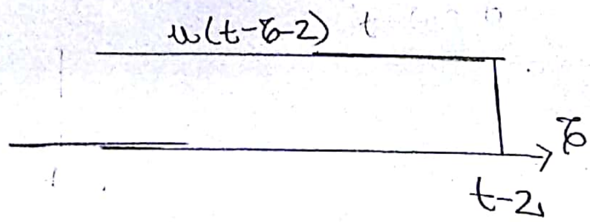
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau+2)\,u(t-\tau+2) - 2u(\tau+2)\,u(t-\tau) + u(\tau+2)\,u(t-\tau-2)]\,d\tau +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} [-u(\tau-2)\,u(t-\tau+2) + 2u(\tau-2)\,u(t-\tau) - u(\tau-2)\,u(t-\tau-2)]\,d\tau$$











$$y(t)=\int_{-2}^{t+2} 1\, d\tau\, u(t+4) - 2\int_{-2}^{t} 1\, d\tau\, u(t+2) + \int_{-2}^{t-2} 1\, d\tau\, u(t) +$$

$t+2>-2$
$t>-4$

$t>-2$

$t-2>-2$
$t>0$

$$-\int_{2}^{t+2} 1\, d\tau\, u(t) + 2\int_{2}^{t} 1\, d\tau\, u(t-2) - \int_{2}^{t-2} 1\, d\tau\, u(t-4)$$

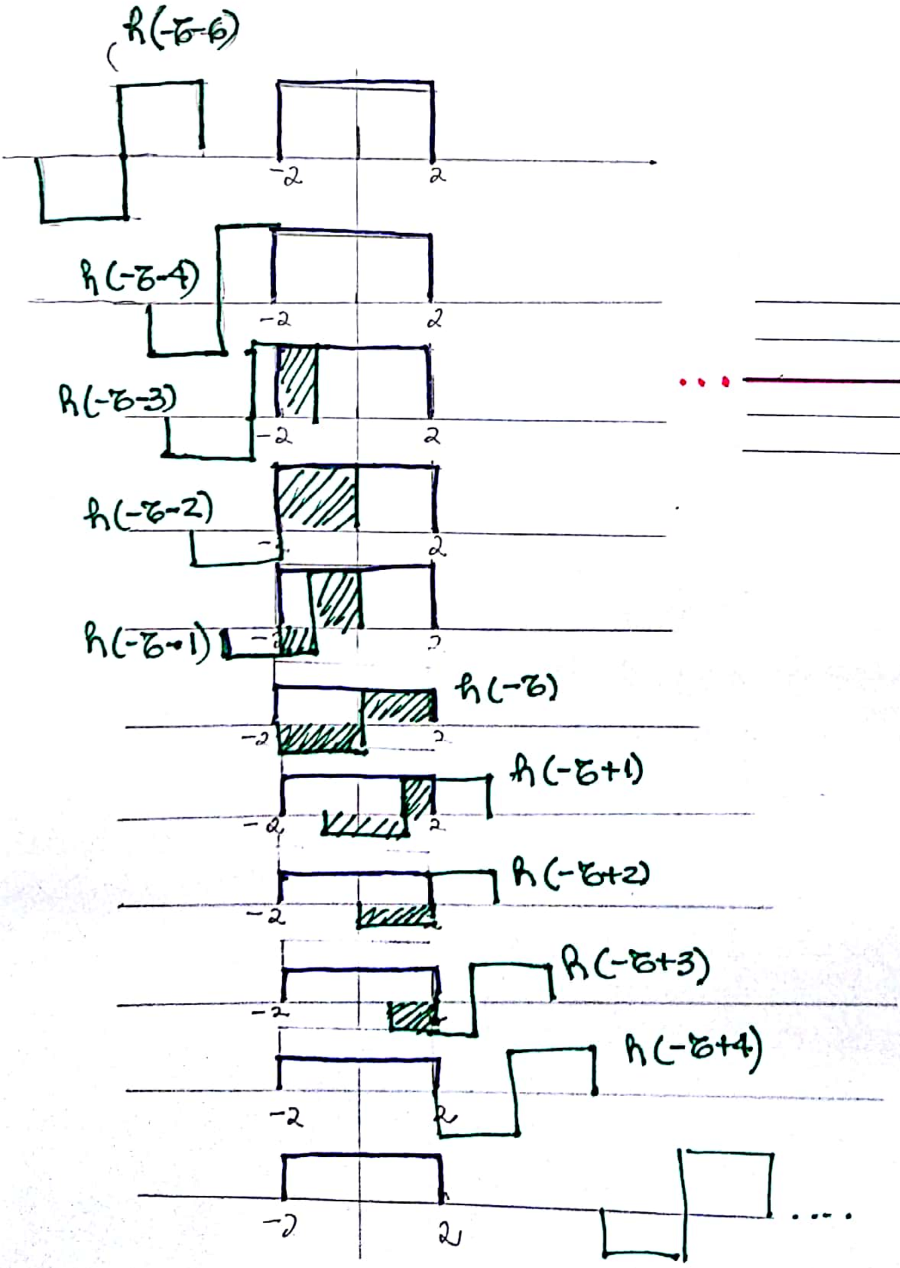
$t+2>2$

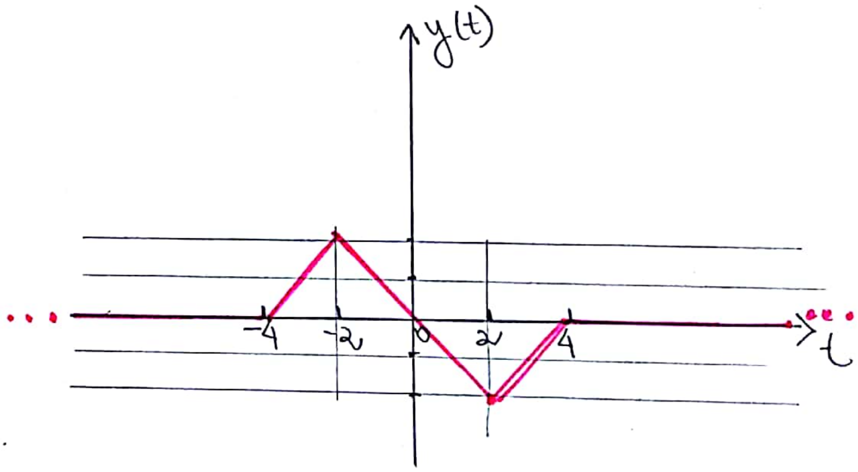
$t>2$

$t-2>2$
$t>4$

$$\therefore\ y(t)=(t+4)\,u(t+4) - 2(t+2)\,u(t+2) + t\,u(t) - t\,u(t) + 2(t-2)\,u(t-2) +$$
$$-(t-4)\,u(t-4)$$

$$\boxed{\therefore\ y(t)=(t+4)\,u(t+4) - 2(t+2)\,u(t+2) + 2(t-2)\,u(t-2) - (t-4)\,u(t-4)}$$





Exemplo do slide: FEITO EM AULA

Solução:

1) $h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$ h(t) é a corrente.

Este exercício e o próximo são do site mostrado nos slides.

a) $x(t) = \delta(t)$

$x(t) = \delta(t)$

$$\underbrace{y(t) = \delta(t) * h(t)} = h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

A multiplicação pela função impulso é a 'identidade' na convolução.

PROVA →
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} u(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau =$$
$$= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} u(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau =$$

· Precisamos lembrar que $\int_a^b \delta(x)\, dx = 1$ (desde que o intervalo a-b contenha o zero)

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} \delta(t-\tau)\, d\tau = \cancel{\int_0^{t_1} \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} \delta(t-\tau)\, d\tau}^{\,0} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} \delta(t-\tau)\, d\tau +$$
$$+ \cancel{\int_{t_2}^{\infty} \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} \delta(t-\tau)\, d\tau}_{\,0}$$

$t_1 \to t_-$
$t_2 \to t_+$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} \delta(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \cancel{\int_{t_1}^{t_2} \delta(t-\tau)\, d\tau}^{\,1}$$
$$= \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

PROPRIEDADES DO IMPULSO UNITÁRIO CONTÍNUO,

1. $\delta(t-\tau) = 0$, p/ $\forall\, t \neq \tau$
2. $\int_{\alpha}^{\beta} \delta(t-\tau)\, dt = 1$ p/ $\alpha < \tau < \beta$, $\int_{\alpha}^{\beta} \delta(t)\, dt = 1$ $\alpha < 0$, $\beta > 0$
3. $\int_{\alpha}^{\beta} x(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau = x(t)$ $\alpha < t < \beta$

b) $x(t) = u(t)$

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} u(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} u(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} d\tau$$

$$y(t) = -e^{-\tau/RC}\Big|_0^t = \left(1 - e^{-t/RC}\right) \quad \text{for } t>0$$

$$\therefore \boxed{y(t) = \left(1 - e^{-t/RC}\right) u(t)}$$

2) $h(t) = u(t) - u(t-t_0)$, $t_0 > 0$ 16

a. $x(t) = u(t)$

$$y(t) = h(t) * u(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau) - u(\tau - t_0)]\, u(\tau - t)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{t} u(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{t} u(\tau - t_0)\, d\tau$$

$$= \underbrace{\int_{0}^{t} 1\, d\tau}_{t \geq 0} - \underbrace{\int_{t_0}^{t} 1\, d\tau}_{t \geq t_0}$$

$$\boxed{y(t) = t\, u(t) - (t - t_0)\, u(t - t_0)}$$

b. $x(t) = u(t) - u(t - t_0)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau) - u(\tau - t_0)]\, [u(t - \tau) - u(t - \tau - t_0)]\, d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau) u(t-\tau) - u(\tau)\, u(t - \tau - t_0) - u(\tau - t_0) u(t - \tau) + u(\tau - t_0)\, u(t - \tau - t_0)]\, d\tau$$

$$= \int_{0}^{\infty} u(t-\tau)\, d\tau - \int_{0}^{\infty} u(t - \tau - t_0)\, d\tau - \int_{t_0}^{\infty} u(t-\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{\infty} u(t - \tau - t_0)\, d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} 1\, d\tau - \int_{0}^{t-t_0} 1\, d\tau - \int_{t_0}^{t} 1\, d\tau + \int_{t_0}^{t-t_0} 1\, d\tau$$

$$= t\, u(t) - (t - t_0)\, u(t - t_0) - (t - t_0)\, u(t - t_0) + (t - 2t_0)\, u(t - 2t_0)$$

$$\boxed{y(t) = t\, u(t) - 2(t - t_0)\, u(t - t_0) + (t - 2t_0)\, u(t - 2t_0)}$$